Vol. 3 No.1 Desember 2010 (34-38)

http://dx.doi.org/10.22202/jp.2010.v3i1.43

Jurnal Pelangi

Website: ejournal.stkip-pgri-sumbar.ac.id/index.php/pelangi

METODE GARIS SINGGUNG DALAM MENENTUKAN HAMPIRAN INTEGRAL TENTU SUATU FUNGSI PADA SELANG TERTUTUP [,]

Zulfaneti dan Rahimullaily*
STKIP PGRI Sumatera Barat

INFO ARTIKEL

Diterima:
Direview:
Disetujui:

Keyword:

Riemann integral, approximate method, sum of Riemann, trapezoid method, tangent line method

Abstrak

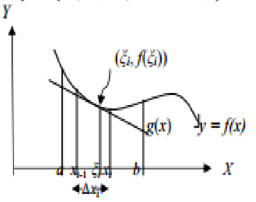
There is a value of Riemann integral from a function that cannot be calculated. In this case, approximate method can be used to interpret the value. One of the approximate method of integral Riemann is tangent line method that is a compound method between the sum of Riemann and trapezoid method. The tangent line method uses the tangent line approach. In this writing, the topic discussed is the tangent line method in deciding the approximacy of Riemann integral of a function

Metode Garis Singgung

Misal f suatu fungsi yang kontinu pada selang tertutup $I = [a,b]$ dan mempunyai turunan di I. P adalah suatu partisi I memakai titik – titik $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n =$ b. Untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, misalkan $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, dan panjang P ditulis $\|P\|$ didefinisikan $\|P\| = \text{maks}\ \Delta x_i$. Suatu persamaan garis singgung dari $y = f(x)$ yang melalui titik $(\xi_i, f(\xi_i))$ adalah

$$\mathrm{g}(x) = y = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x - \xi_i)$$

Titik potong garis g dengan garis $x = x_{i-1}$ dan $x = x_i$ adalah $\left(x_{i-1}, f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_{i-1} - \xi_i)\right)$ dan $\left(x_i, f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_i - \xi_i)\right)$.



Gambar 1. Hampiran integral tentu dengan metode garis singgung

Berdasarkan Gambar 1, daerah yang dibatasi oleh garis $y = \mathrm{g}(x) = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x - \xi_i)$, $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, dan $y = 0$ berbentuk trapesium yang luasnya

$$L_{f;[x_{i-1},x_i]} = \frac{1}{2}\left(f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_{i-1} - \xi_i) + f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x_{i-1} - \xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_{i-1} - 2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

Jumlah luas $L_{f;[x_{i-1},x_i]}$ untuk semua $i = 1, 2, ..., n$ adalah

$$L_{f;[a,b]} = \sum_{i=1}^{n} L_{f;[x_{i-1},x_i]} = \sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i) + \frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

Jika $L_{f;[a,b]}$ mempunyai limit untuk n menuju tak terhingga (sama artinya dengan $\|P\|$ menuju 0), maka fungsi f terintegralkan dalam metode garis singgung pada I.

Definisi 1

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$, mempunyai turunan di I, dan $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ adalah suatu partisi I, tulis P. Untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, misalkan $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, dan panjang P ditulis $\|P\|$ didefinisikan $\|P\| = \text{maks}\ \Delta x_i$. Jika

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i) + \frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\right)\Delta x_i \qquad ...1$$

ISSN: 2085-1057 | E-ISSN: 2460-3740

memiliki limit n menuju tak terhingga (sama artinya dengan ‖ ‖ menuju 0) maka limit tersebut disebut integral garis singgung dan f terintegralkan dalam metode garis singgung f pada I, ditulis

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i \quad \dots 2$$

Definisi 2

Fungsi f yang terdefinisi pada satu titik a maka $_{GS}\int_{[a,a]} f = 0$.

Misalkan $_{GS}\int_{[a,b]} f$ *maka* $_{GS}\int_{[b,a]} f = -_{GS}\int_{[a,b]} f$.

Dalam hal ini $_{GS}\int_{[b,a]} f$ *menyatakan batas integrasinya dari b ke a, bukan integral pada* [b,a].

Teorema 3

Misalkan $_{GS}\int_{[a,b]} f_1$ *dan* $_{GS}\int_{[a,b]} f_2$ *dan misalkan* C_1 *dan* C_2 *sebarang konstanta, maka:*

(i) $_{GS}\int_{[a,b]} C_1 f_1$ *dan* $_{GS}\int_{[a,b]} C_2 f_2$

(ii) $_{GS}\int_{[a,b]} (C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_{1\,GS}\int_{[a,b]} f_1 + C_{2\,GS}\int_{[a,b]} f_2$

Bukti:

(i) Menurut Definisi 1, maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f_1(\xi_i)+\frac{1}{2}f_1'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

Jika kedua ruas dikalikan C_1, maka

$$C_1\,{}_{GS}\int_{[a,b]} f_1 = C_1\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f_1(\xi_i)+\frac{1}{2}f_1'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(C_1 f_1(\xi_i)+\frac{1}{2}C_1 f_1'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \int_{[a,b]} C_1 f_1$$

Hal yang sama untuk membuktikan $_{GS}\int_{[a,b]} C_2 f_2$

(ii) Menurut Definisi 1, maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} (C_1 f_1 + C_2 f_2)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(C_1 f_1(\xi_i)+C_2 f_2(\xi_i)+\frac{1}{2}(C_1 f_1'(\xi_i)+C_2 f_2'(\xi_i))(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= C_1\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f_1(\xi_i)+\frac{1}{2}f_1'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i\right) + C_2\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f_2(\xi_i)+\frac{1}{2}f_2'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i\right)$$

$$= C_{1\,GS}\int_{[a,b]} f_1 + C_{2\,GS}\int_{[a,b]} f_2$$

Kaitan Metode Garis Singgung dengan Integral Riemann dan Metode Trapesium

(i) Misalkan f sebarang fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a,b]$ dan mempunyai turunan di I, dan misalkan $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = {}_R\int_{[a,b]} f$$

Bukti:

Misalkan f sebarang fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a,b]$ dan mempunyai turunan di I, dan misalkan $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ maka diperoleh $x_{i-1}+x_i-2\xi_i = 0$.

Menurut Definisi 1 maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}f'(\xi_i)(0)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$= {}_R\int_{[a,b]} f$$

(ii) Misalkan $f(x) = tx + s$ dengan t dan s merupakan konstanta dan ξ_i sebarang dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = {}_T\int_{[a,b]} f$$

Bukti :

Misalkan $f(x) = tx + s$ dengan t dan s merupakan konstanta, $f(x)$ fungsi polynomial maka $f(x)$ kontinu pada setiap bilangan riil, dan mempunyai turunan yaitu

$$f'(x) = f'(tx+s) = f'(tx) + f'(s) = tf'(x) + 0 = t$$

untuk semua x di $I = [a,b]$. Misalkan juga ξ_i sebarang dengan $i = 1, 2, \dots, n$, sehingga menurut Definisi 1

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left((t\xi_i+s)+\frac{1}{2}t(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}((tx_{i-1}+s)+(tx_i+s))\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))\Delta x_i$$

$$= {}_T\int_{[a,b]} f$$

(iii) Misalkan f merupakan fungsi konstan dan misalkan sebuah titik sampel sebarang dari I_i yaitu ξ_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = {}_R\int_{[a,b]} f$$

Bukti :

Misalkan f merupakan fungsi konstan. Fungsi konstan merupakan fungsi polynomial, maka f kontinu pada setiap bilangan riil akibatnya turunan dari f yaitu $f'(x) = 0$. Misalkan juga ξ_i sebarang dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Menurut Definisi 1, maka

$$_{GS}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}f'(\xi_i)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{1}{2}(0)(x_{i-1}+x_i-2\xi_i)\right)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= {}_R\int_{[a,b]} f$$

Teorema 4

Jika fungsi f terintegralkan $_{GS}\int_{[a,b]} f$ *maka fungsi f terintegralkan* $_{R}\int_{[a,b]} f$

Bukti:

Fungsi f terintegralkan $_{GS}\int_{[a,b]} f$. Menurut Definisi 1

$$
\begin{aligned}
{}_{GS}\int_{[a,b]} f &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\,\Delta x_i \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\,\Delta x_i
\end{aligned}
$$

Karena nilai $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i = 0$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}_{GS}\int_{[a,b]} f &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= {}_{R}\int_{[a,b]} f
\end{aligned}
$$

Pembuktian $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i = 0$

$n \to \infty$ sama artinya dengan $\|P\| \to 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\|P\|\to 0} \left(\frac{1}{2} f'(\xi_1)(x_0 + x_1 - 2\xi_1)\Delta x_1 + \frac{1}{2} f'(\xi_2)(x_1 + x_2 - 2\xi_2)\Delta x_2 + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} f'(\xi_n)(x_{n-1} + x_n - 2\xi_n)\Delta x_n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lim_{\|P\|\to 0} \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \lim_{\|P\|\to 0} f'(\xi_i) \cdot \lim_{\|P\|\to 0} (x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \cdot \lim_{\|P\|\to 0} \Delta x_i = 0
\end{aligned}
$$

Akan dibuktikan $\lim_{\|P\|\to 0} (x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) = 0$. Ambil $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ maka, $0 < \|P\| < \delta$ berarti

$$
\begin{aligned}
|x_{i-1} + x_i - 2\xi_i| &= |\,x_{i-1} + x_i - 2\xi_i| = |\,x_{i-1} - \xi_i + x_i - \xi_i| \\
&\le |x_{i-1} - \xi_i| + |x_i - \xi_i| \\
&\le |x_{i-1} - x_i| + |x_i - x_{i-1}| \\
&\le 2\|P\| \\
&\le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$0 < \|P\| < \delta \Rightarrow |x_{i-1} + x_i - 2\xi_i| < \varepsilon$$

Teorema 5

Jika fungsi f terintegralkan $_{R}\int_{[a,b]} f$ *dan mempunyai turunan pada* $[a,b]$, *maka fungsi f terintegralkan* $_{GS}\int_{[a,b]} f$

Bukti:

Fungsi f terintegralkan $_{R}\int_{[a,b]} f$, maka

$$ {}_{R}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i $$

Fungsi f mempunyai turunan pada $[a,b]$. Misalkan $\xi_i \in [a,b]$, maka turunan fungsi f ada nilainya pada ξ_i (dengan kata lain $f'(\xi_i)$ ada). akibatnya f kontinu pada $[a,b]$.

Kedua ruas pada 3 ditambah dengan

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i $$

maka

$$
\begin{aligned}
&{}_{R}\int_{[a,b]} f + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\,\Delta x_i \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i \\
&= {}_{GS}\int_{[a,b]} f
\end{aligned}
$$

Pada Teorema 4 telah dibuktikan bahwa

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)\,(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i = 0 $$

sehingga diperoleh

$$ {}_{R}\int_{[a,b]} f + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i = {}_{R}\int_{[a,b]} f + 0 = {}_{GS}\int_{[a,b]} f $$

Teorema 6

Misalkan f suatu fungsi yang terintegralkan $_{GS}\int_{[a,b]} f$

(i) jika $\xi_i < \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), f'(\xi_i) > 0$ *atau* $\xi_i > \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), f'(\xi_i) < 0$ *untuk setiap* I_i *dengan* $i = 1, 2, \ldots, n$ *maka*

$$ \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i $$

dengan kata lain, nilai hampiran integral tentu dari fungsi f menggunakan dengan metode garis singgung lebih besar dibandingkan dengan nilai hampiran jumlah Rieman.

(ii) *jika* $\xi_i > \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), f'(\xi_i) > 0$ *atau* $\xi_i < \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), f'(\xi_i) < 0$ *untuk setiap* I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *maka*

$$ \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i $$

dengan kata lain, nilai hampiran nilai integral tentu dari fungsi f menggunakan hampiran jumlah Riemann besar dibandingkan dengan nilai hampiran dengan metode garis singgung.

Bukti:

(i) Perhatikan bahwa

$$ \xi_i < \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \text{ atau } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) > \xi_i $$

sehingga $\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) - \xi_i > \xi_i - \xi_i$ atau $\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) > 0$

dan $f'(\xi_i) > 0$ maka $f'(\xi_i) \cdot \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) > 0$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \cdot \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i &> \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i &> \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i
\end{aligned}
$$

(ii) Perhatikan bahwa

$$ \xi_i > \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \text{ atau } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) < \xi_i \text{ atau } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) < 0 $$

dan $f'(\xi_i) > 0$ maka $f'(\xi_i) \cdot \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) < 0$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \cdot \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i)\Delta x_i &< \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i-1} + x_i - 2\xi_i) \right) \Delta x_i &< \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i
\end{aligned}
$$

Contoh Perhitungan Hampiran Integral Tentu dengan Metode Garis Singgung

Telah diketahui bahwa terdapat 3 jenis

fungsi yang dapat terintegralkan Riemann pada selang tertutup [a,b] dan menurut Teorema 5 maka fungsi tersebut harus memiliki turunan pada [a,b] untuk dapat diintegralkan dengan metode garis singgung. Pada bagian ini akan dibahas contoh dari 3 jenis fungsi tersebut dan satu contoh yang sulit diselesaikan dengan teorema dasar kalkulus. Penyelesaian hampiran integral tentu dari fungsi diselesaikan dengan bantuan computer menggunakan software Matlab versi 5.3.1

Misalkan $\xi_i = (2\ x_{i-1} + x_i)/3$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, sehingga $\xi_i < \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ dan misalkan $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$ sehingga $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

4. Fungsi Polinom

Perhatikan beberapa contoh berikut:

a. Mencari suatu nilai hampiran integral tentu berikut:

$$\int_1^4 (x^4 - 3)\, dx$$

dengan $n = 100$, kemudian hasilnya dibandingkan dengan jumlah Riemann dan metode trapesium.

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = x^4 - 3$, maka

$$f'(x) = f'(x^4 - 3) = f'(x^4) - f'(3) = f'(x^4) - f'(3) = 4x^3 - 0 = 4x^3$$

Karena $f(x)$ memiliki turunan pada [1,4], maka hampiran dari $\int_1^4 (x^4 - 3)\, dx$ dapat dihitung menggunakan metode garis singgung, dan $f'(x) > 0$

Nilai eksak berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus

$$\int_1^4 x^4 - 3\, dx = \frac{1}{5}(x^5) - 3x \Big|_1^4 = 195.6000$$

- menggunakan (1) dalam metode garis singgung dengan $n = 100$ maka $\int_1^4 (x^4 - 3)\, dx \approx 195.5874$
- menggunakan jumlah Riemann dengan $n = 100$ maka $\int_1^4 (x^4 - 3)\, dx \approx 194.3187$
- menggunakan metode trapesium dengan $n = 100$ maka $\int_1^4 (x^4 - 3)\, dx \approx 195.6189$

Dengan

r_R metode garis singgung $= \frac{|195.6000 - 195.5874|}{|195.6000|} = 6.4417 \times 10^{-5}$

r_R jumlah Riemann $= \frac{|195.6000 - 194.3187|}{|195.6000|} = 660 \times 10^{-5}$

r_R metode trapesium $= \frac{|195.6000 - 195.6189|}{|195.6000|} = 9.6625 \times 10^{-5}$

r_R metode garis singgung $<$ r_R metode trapesium $<$ r_R jumlah Riemann dan disimpulkan bahwa nilai hampiran dengan metode garis singgung lebih baik dari nilai hampiran jumlah Riemann dan metode trapesium.

b. Mencari suatu nilai hampiran integral tentu berikut:

$$\int_{-1}^4 |x|\, dx$$

dengan $n = 100$, kemudian hasilnya dibandingkan dengan jumlah Riemann dan metode trapesium.

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = |x|$, tetapi $f(x)$ tidak memiliki turunan di $x = 0$, maka $f'(0)$ dihitung dengan

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Limit ini tidak ada karena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

sedangkan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

maka nilai hampiran dari $\int_{-1}^4 |x|\, dx$ tidak dapat dihitung dengan metode garis singgung

c. Fungsi Sinus dan Cosinus

Mencari suatu nilai hampiran integral tentu berikut:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\ \ dx$$

dengan $n = 10$, kemudian hasilnya dibandingkan dengan jumlah Riemann dan metode trapesium.

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = \sin x$ maka $f'(x) = \cos x$

Karena $f(x)$ memiliki turunan pada $[0, \frac{1}{2}\pi]$, maka hampiran dari $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\ dx$ dapat dihitung menggunakan metode garis singgung, dan $f'(x) > 0$

Nilai eksak

$$\sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$$

- Menggunakan dalam (1) metode garis singgung dengan $n = 10$ maka $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\ dx \approx 1.0014$
- menggunakan jumlah Riemann dengan $n = 10$ maka $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\ dx \approx 0.9745$
- menggunakan metode trapesium dengan $n = 10$ maka $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\ dx \approx 0.9979$

dengan

r_R metode garis singgung $= \frac{|1 - 1.0014|}{|1|} = 0.0014$

r_R jumlah Riemann $= \frac{|1 - 0.9745|}{|1|} = 0.0255$

r_R metode trapesium $= \frac{|1 - 0.9979|}{|1|} = 0.0021$

r_R metode garis singgung $<$ r_R metode trapesium $<$ r_R jumlah Riemann dan disimpulkan bahwa nilai hampiran dengan metode garis singgung lebih baik dari nilai hampiran jumlah Riemann dan metode trapesium.

d. Fungsi rasional

Mencari suatu nilai hampiran integral tentu berikut:

$$\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx$$

dengan $n = 100$, kemudian hasilnya dibandingkan dengan hampiran jumlah Riemann dan metode trapesium.

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = \frac{1+x}{x}$, maka $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$

Karena $f(x)$ memiliki turunan pada [2,4], maka hampiran dari $\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx$ dapat dihitung menggunakan metode garis singgung, dan $f'(x) < 0$

Nilai eksak

$$\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx = \ln(x) + x|_2^4 = 2.6931$$

- menggunakan dalam (1) metode garis singgung dengan $n = 100$ maka $\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx \approx 2.6931$
- menggunakan jumlah Riemann dengan $n = 100$ maka $\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx \approx 2.6940$
- menggunakan metode trapesium dengan $n = 100$ maka $\int_2^4 \frac{1+x}{x}\,dx \approx 2.6932$

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Menggunakan metode garis singgung dengan $n = 100$ maka

$$\int_2^4 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0.1528$$